Université Paris-Diderot **7 octobre 2014**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Section C

Devoir surveillé 1

Durée : 1 heure.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(1-\mathrm{i})z^2 - z - 5\mathrm{i} = 0.$$

Indication : $\sqrt{841} = 29$.

Corrigé 1. On a $\Delta = 21 + 20\mathrm{i}$. Cherchons $\delta = x + \mathrm{i}y$ solution(s) de $\delta^2 = \Delta$ par la méthode cartésienne :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = 20 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 4 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe,} \end{cases}$$

et donc $\delta = \pm(5+2\mathrm{i})$. On en déduit les deux solutions de l'équation $z_\pm = \frac{1\pm(5+2\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})}$, soit $z_+ = 1+2\mathrm{i}$ et $z_- = -\frac{1}{2}(1+3\mathrm{i})$.

Exercice 2.

(a) Énoncer les formules d'Euler.

(b) Linéariser $\sin^4 \alpha$.

Corrigé 2.

(a) $\cos(\alpha) = \frac{e^{\mathrm{i}\alpha}+e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{e^{\mathrm{i}\alpha}-e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}$.

(b) $\sin^4 \alpha = \left(\frac{e^{\mathrm{i}\alpha}-e^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\mathrm{i}}\right)^4$ qu'on développe avec le binôme de Newton (on retrouve les coefficients $1, 4, 6, 4, 1$ grâce au triangle de Pascal par exemple) :

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha &= \tfrac{1}{(2\mathrm{i})^4}\left(e^{4\mathrm{i}\alpha} - 4e^{3\mathrm{i}\alpha}e^{-\mathrm{i}\alpha} + 6e^{2\mathrm{i}\alpha}e^{-2\mathrm{i}\alpha} - 4e^{\mathrm{i}\alpha}e^{-3\mathrm{i}\alpha} + e^{-4\mathrm{i}\alpha}\right) \\ &= \tfrac{1}{2^4}\left(e^{4\mathrm{i}\alpha} - 4e^{2\mathrm{i}\alpha} + 6 - 4e^{-2\mathrm{i}\alpha} + e^{-4\mathrm{i}\alpha}\right) \\ &= \tfrac{1}{2^4}\left(2\cos(4\alpha) - 8\cos(2\alpha) + 6\right) \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\cos(4\alpha) - 4\cos(2\alpha) + 3\right) \end{aligned}$$

Exercice 3.

(a) Exprimer sous formes exponentielle, trigonométrique et cartésienne les racines sixièmes de l'unité.

(b) Représenter graphiquement ces nombres dans le plan, en utilisant le cercle unité.

(c) Définir les racines primitives sixièmes de l'unité et les déterminer.

(d) Soit η une racine primitive sixième de l'unité. Calculer :

$$S = 1 + 2\eta + 3\eta^2 + 4\eta^3 + 5\eta^4 + 6\eta^5.$$

Indication : Calculer d'abord $(1-\eta)S$.

Corrigé 3.

(a) Racines sixièmes de l'unité : $\eta_k = e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}} = e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}} = \cos(\frac{k\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{k\pi}{3})$ pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, c'est à dire $\eta_0 = 1$, $\eta_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta_3 = -1$, $\eta_4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\eta_5 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Soit η une racine sixième de l'unité. Alors η est racine primitive si et seulement si $\eta^m \neq 1$ pour $0 < m < 6$. On vérifie que η_1 et η_5 sont primitives (c'est toujours le cas). Ce sont les seules : $\eta_0^1 = 1$, $\eta_2^3 = 1$, $\eta_3^2 = 1$, $\eta_4^3 = 1$.

(d) On a $(1-\eta)S = 1+2\eta+3\eta^2+4\eta^3+5\eta^4+6\eta^5-(\eta+2\eta^2+3\eta^3+4\eta^4+5\eta^5+6\eta^6) = \sum_{j=0}^{5}\eta^j - 6\eta^6$. Comme η est primitive, l'ensemble $\{\eta^k, 0 \leq k \leq 5\}$ est l'ensemble des racines sixièmes de sorte que $1+\eta+\eta^2+\eta^3+\eta^4+\eta^5 = 0$ (la somme des racines n-èmes est nulle). D'où $S = -6\eta^6 = -6$ car $\eta^6 = 1$.